Векторные пространства

1. Докажите, что в векторном пространстве $\mathbb{R}^2$ любой базис имеет размерность 2, т. е. $\mathbb{R}^2$ двумерно.

2. Найдите минимальную мощность базиса $\mathbb{R}[x]$ над $\mathbb{R}$.

3. Докажите, что у векторного пространства $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ не может быть ни конечного, ни даже счётного базиса.

4. Докажите, что, если $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \rangle = V$, то у пространства V есть базис, состоящий из $\vec{u}_i$.

5. В конечномерном пространстве V дан набор линейно независимых векторов $U = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k\}$. Докажите, что, добавив к U несколько векторов, можно получить базис V.

6. Докажите, что определение размерности корректно: в конечномерном пространстве все базисы состоят из одинакового количества векторов.

7. Пусть F – конечное поле, а p – его характеристика. Докажите, что F состоит из p^k элементов, где $k \in \mathbb{N}$.

8. Докажите, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости A_1BD и CB_1D_1 делят диагональ AC_1 на равные части.

9. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из чисел $1, 2, \ldots, 100$ так, чтобы произведение чисел никакого набора выбранных чисел не являлось полным квадратом?

10. В множестве $\{1, \ldots, n\}$ выбрали $n+1$ различное непустое подмножество A_1, A_2, $\ldots$, A_{n+1}. Докажите, что можно выбрать два непустых набора $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}\}$ и $\{Aj_1, \ldots, A_{j_q}\}$ так, что все числа i_s и j_ζ различны, а объединение подмножеств первого набора совпадает с объединением подмножеств второго набора.

11. Какое наибольшее количество значений может принимать функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что для любых векторов u, v и чисел α, β выполняется $f(\alpha u + \beta v) \leqslant \max\bigl(f(u), f(v)\bigr)$?

12. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такие, что, если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то верно равенство $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$.

13. Функции $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таковы, что для любой тройки $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ функция $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ монотонная. Докажите, что существуют такие вещественные числа c_1, c_2 и c_3 (не все нулевые), такие что при всех $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_f(x) = 0$.

14. Дан набор из нескольких гирек, на каждой написана масса. Известно, что наборы масс и надписей одинаковы, но возможно некоторые надписи перепутаны. Весы представляют из себя горизонтальный отрезок, закрепленный за середину. При взвешивании гирьки прикрепляются в произвольные точки отрезка, после чего весы остаются в равновесии либо отклоняются в ту или иную сторону. Всегда ли удастся за одно взвешивание проверить, все надписи верны или нет?

15. В каждой клетке таблицы размером 4×4 стоит знак $+$ или $-$. Разрешено одновременно менять знаки на противоположные в любой клетке и во всех клетках, имеющих с ней общую сторону. Сколько разных таблиц можно получить, многократно применяя такие операции?

16. В таблице $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $(n + m - 1)$ чисел.

17. Докажите, что количество способов разбить множество вершин любого графа на два (не обязательно непустых) подмножества так, что в каждом из подграфов, порождённых этими подмножествами, степени всех вершин чётны, является степенью двойки.